Exercice 1 : Intégrale de Riemann

A l'aide d'integrale de Riemann d'une fonction continue, déterminer la limite des suites suivants :

$S_{n1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$,

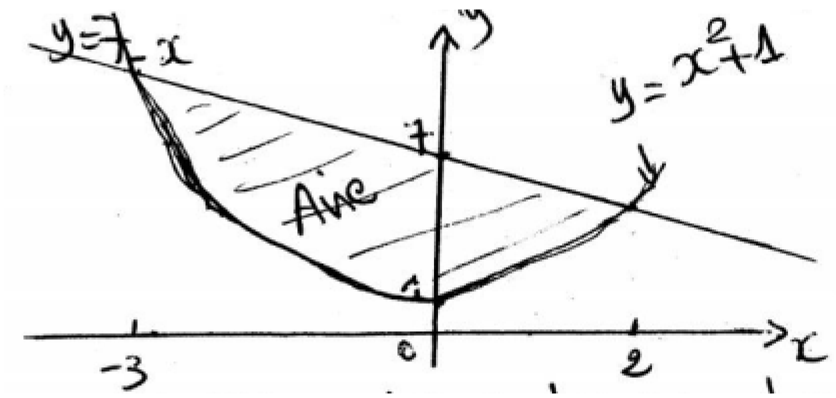
$S_{n2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+k^2}{n^3+k^3}$,

$S_{n3} = \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2Kn}}$,

$S_{n4} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\pi^2}{n^2} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et

$S_{n5} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$.

2. Déterminer l'aire du domaine délimité par les équations $[y = x^2 + 1]$ et $[y = 7 - x]$.

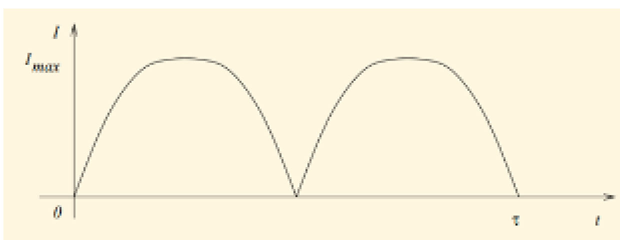


3. On pose : $f(x) : [0,2] \to \Re$ une fonction définie par : $f(x) = x^2$; avec : $\left|\vec{i}\right| = 1cm; \left|\vec{j}\right| = 10cm.$

- Trouver en cm^2 l'aire de région délimitée par C_f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équation et pour n=20, n=100 et n=∞.
- Déterminer la valeur moyenne et la valeur efficace sur une période du courant redressé à deux alternances (voir une représentation approximative sur la figure suivante).

$I(t) = I_{max} sin(\omega t), \qquad \omega = 2\pi/\tau$

où τ est la période du courant.



Exercice 2 : Primitives et l'intégrale

Calcul de primitives et d'intégrales suivants :

$I_1 = \int \frac{2x+3}{x^2+3x-5} dx$,

$I_2 = \int\limits_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^2+1} dx$,

$I_3 = \int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x} \right) dx$,

$I_4 = \int\limits_2^e \frac{\ln(x)+1}{x(\ln x)^2} dx$ et

$I_5 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\, dx.$

Exercice 3 : Méthodes générales de calcul d'intégrales

1. **Intégration par parties.**

$I_1 = \int x^2 \ln(x)\, dx$,

$I_2 = \int_0^1 arctan(x)\, dx$,

$I_3 = \int_0^\pi \left(x^2+1\right) sh(x)\, dx$,

$I_4 = \int cos(x)\, e^{2x} dx$,

$I_5 = \int \left(x^2+2x+1\right) \sin(x)\, dx.$

2. **Intégration par changement de variable**

$I_1 = \int \frac{\ln^3(x)}{x} dx$,

$I_2 = \int \sin(2x)\, e^{\sin(x)} dx$,

$I_3 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$,

$I_4 = \int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \cos\left(\sqrt{x}\right) dx$,

$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{a^x+a^{-x}} dx.$

3. **Intégration des fonctions trigonométriques**

- **Fonctions trigonométriques du type 1**

$I_1 = \int_0^{\pi} \sin(5x) sin(2x) dx,$

$I_2 = \int_0^{2\pi} sh(x) ch(2x) dx,$

$I_3 = \int cos(x) cos(3x) dx.$

- **Fonctions trigonométriques du type 2**

$I_1 = \int \cos^4(x) \sin^2(x)\, dx,$

$I_2 = \int sh^3(x)\, ch^4(x)\, dx,$

$I_3 = \int \cos^3(x) \sin^5(x)\, dx.$

- **Fonctions trigonométriques du type 3**

$I_1 = \int \frac{\cos^3(x)}{\sin(x)} dx,$

$I_2 = \int \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)} dx,$

$I_3 = \int \frac{sh(x)}{sh(x)+2ch(x)} dx,$

$I_4 = \int \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)}.$

- **Intégration des fractions rationnelles.**

$I_1 = \int \frac{x+1}{x^2-8x+7} dx.$

$I_2 = \int \frac{3x-6}{x(x-1)(x+2)} dx$

$I_3 = \int \frac{x^2+3}{x^2-3x+2} dx.$

$I_4 = \int \frac{2x+5}{x^3-8x} dx.$

$I_5 = \int \frac{6x-7}{(x+1)(x-2)^2} dx.$

Exercice 4 : Méthodes de calcul d'intégrales doubles

Théorème de Fubini : Evaluer les intégrales suivantes :

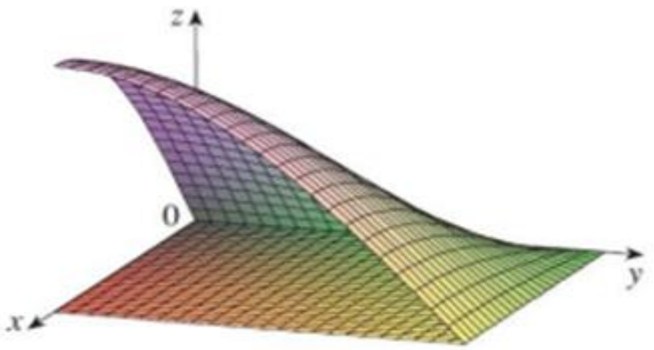
$$I_1 = \iint_D \sin(x)\cos(y)\,dxdy,\ ou\ D = (x,y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$I_2 = \iint_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy,\ ou\ D = (x,y) \in \mathbb{R}^2/y \leq x \leq y^3,\ 1 \leq y \leq 2.$$

$$I_3 = \iint_D (x+2y)\,dxdy,\ ou\ D = (x,y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x.$$

$$I_4 = \iint_D e^{x+y}dxdy,\ ou\ D = (x,y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\ .$$

$$I_5 = \iint_D xydxdy,\ ou\ D = (x,y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x\ .$$



Application au calcul d'aires et de volumes :

A. Dans $\mathbb{R}^2$, on considéré le domaine D délimite par les courbes d'équations $x = \frac{y^2}{4}$ et $y = 2x$.

1) calculer l'aire de D.

2) évaluer l'intégrale $\iint_D (y-x)\,dxdy$.

B. calculer l'intégrale suivante : $I = \iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^3},\ ou\ D = (x,y) \in \mathbb{R}^2/x \geq 1,\ y \geq 1\ et\ x + y = 3.$

Changement de varaible :

A- Evaluer l'integrale double suivante en utilisant les coordonneés polaires:

$$I = \iint_D (x+y)^2\,dxdy,\ ou\ D = (x,y) \in \mathbb{R}^2/x \geq 0,\ y \geq 0\ et\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 9.$$

B.1– Tracer le domaine suivante définie par : $D = (x,y) \in \mathbb{R}^2/x \geq 1,\ et\ 4 \leq (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 9.$

B.2- Calculer l'integrale double suivant : $I = \iint_D xydxdy.$

Exercice 5 : Méthodes de calcul d'intégrales triples

Théorème de Fubini : Evaluer les intégrales triples suivantes :

$I_1 = \int\int\limits_V\int (x + 2y - z)\, dxdydz,\ ou\ V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3/0 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 1\ et\ 1 \leq z \leq 3.$

$I_2 = \int\int\limits_V\int x^2 z\sqrt{1 + cos\,(4y)}dxdydz,\ ou\ V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3/\,[0, 1] \times \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right] \times [1, 2].$

$I_3 = \int\int\limits_V\int (z - 2x + 3y)\, dxdydz,\ ou\ D = (x, y) \in \mathbb{R}^2/\,[0, 1]^2\ \ et\ y \leq z \leq x.$

$I_4 = \int\int\limits_V\int ze^{-y^2} dxdydz,\ ou\ V = (x, y) \in \mathbb{R}^3/0 \leq x \leq 2y,\ 0 \leq y \leq z\ et\ \ [0, 1]\ .$

$I_5 = \int\int\limits_V\int (x + y + z)\, dxdydz,\ ou\ V = (x, y) \in \mathbb{R}^3/0 \leq x \leq z,\ x - z \leq y \leq x + z\ et\ \ [-1, 1]\ .$

Application au calcul de volumes :

A. Dans $\mathbb{R}^3$, on considéré le domaine V délimite par :

$$x = 4 - y^2,\ x + z = 4,\ x = 0\ et\ z = 0.$$

- Calculer le volume de V.

Changement de varaible :

- Evaluer l'integrale triple suivante en utilisant les coordonnées cylindriques:

$I = \int\int\limits_V\int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz,\ ou\ V = (x, y) \in \mathbb{R}^3/x^2 + y^2 \leq R,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\ et\ 0 \leq z \leq R.$